Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 512.542

Конечные группы с модулярными подгруппами порядка 4

В.А. Васильев

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:
(1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$, таких, что $X \le Z$, и
(2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$, таких, что $M \le Z$.
Рассматриваются группы с модулярными подгруппами порядка 4 силовских подгрупп.
Ключевые слова: максимальная подгруппа, минимальная подгруппа, силовская подгруппа, модулярная подгруппа, $\mathfrak{X}\Phi$-гиперцентр.

All groups considered are finite. A subgroup M of a group G is a modular subgroup in G, if the following conditions are true:
(1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ for all $X \le G, Z \le G$ with $X \le Z$, and
(2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ for all $Y \le G, Z \le G$ with $M \le Z$.
Groups with modular subgroups of order 4 of Sylow subgroups are studied.
Keywords: maximal subgroup, minimal subgroup, Sylow subgroup, modular subgroup, $\mathfrak{X}\Phi$-hypercenter.

Введение. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Пусть G – группа. Напомним, что подгруппа H из G называется 2-максимальной (второй максимальной) подгруппой в G, если H является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы M из G. Аналогично определяются 3-максимальные подгруппы и так далее. С изучением 2-максимальных, 3-максимальных, n-максимальных подгрупп связано большое количество исследований (см., например, [1]–[10]).

В последние двадцать лет началось активное изучение аналогов максимальных и вторых максимальных подгрупп – минимальных и вторых минимальных (2-минимальных) подгрупп. Напомним, что подгруппа из G простого порядка называется минимальной подгруппой. Подгруппа группы G порядка pq, где p и q – необязательно различные простые числа, называется второй минимальной подгруппой. Особый интерес в изучении структуры группы G представляет вопрос о том, как минимальные подгруппы могут быть вложены в группу G. Ито [11] доказал, что если G – группа нечетного порядка и все минимальные подгруппы из G лежат в центре группы G, то G нильпотентна. Развитием результата Ито является следующее утверждение [12]: если для нечетного простого числа p, каждая подгруппа из G порядка p лежит в центре группы G, то G является p-нильпотентной группой. Если все элементы из G порядка 2 и 4 лежат в центре группы G, то G является 2-нильпотентной группой. Бакли [13] доказал, что если G – группа нечетного порядка и все минимальные подгруппы из G нормальны в G, то G сверхразрешима. Далее эти результаты были расширены другими авторами (например, Асаад [14], Дерр, Дескинз и Мукхерджи [15] и Йокояма [16]). Также стоит отметить следующий известный результат Гашюца [12] в этом направлении: если каждая минимальная подгруппа группы G является нормальной в G, то коммутатор G' группы G является 2-замкнутым. Баллестер-Болинше, Естебан-Ромеро и Янминг Ли [17] исследовали группы с заданным вложением вторых минимальных подгрупп силовских подгрупп.

Вместе с тем, остается открытым следующий вопрос: что можно сказать о группе G, если все ее вторые минимальные подгруппы или хотя бы все ее подгруппы порядка 4 обладают заданным свойством вложения?

В данной работе мы доказываем следующий новый результат в этом направлении:

Теорема. *Пусть* E *– нормальная подгруппа группы* G, P *– силовская* 2*-подгруппа из* E *с* $|P|>4$. *Предположим, что каждая подгруппа* H *из* P *порядка 4, не имеющая* 2*-нильпотентного добавления в* G, *является модулярной в* G. *Тогда* $E/O_{2'}(E) \le Z_{\infty}(G/O_{2'}(E))$.

Используемая в статье терминология стандартна, при необходимости можно обратиться к монографиям [18], [19].

Определения и некоторые предварительные результаты. Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:

(1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$, таких, что $X \le Z$, и

(2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$, таких, что $M \le Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [20]) решетки всех подгрупп группы. Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

Лемма 1 [20]. *Пусть* M *– модулярная подгруппа в группе* G. *Тогда:*

(1) $H \bigcap M$ является модулярной подгруппой в H для всех $H \le G$.

(2) Если N нормальна в G, то MN/N модулярна в G/N.

(3) Если M_1 и M_2 модулярные подгруппы в G, то $\langle M_1, M_2\rangle$ также модулярная подгруппа в G.

Символом $Z_{\mathfrak{U}}(G)$ обозначают наибольшую нормальную подгруппу группы G, у которой все G-главные факторы цикличны ($Z_{\mathfrak{U}}(G)=1$, если в G нет неединичных нормальных подгрупп с таким свойством).

Лемма 2 [20]. *Если подгруппа* M *модулярна в группе* G, *то* $M^G/M_G \le Z_{\mathfrak{U}}(G/M_G)$.

В работе [21] было введено следующее понятие:

Определение. *Пусть* $Z_{\mathfrak{X}\Phi}$ *– произведение всех нормальных подгрупп группы* G, *у которых нефраттиниевы* G*-главные факторы* $\mathfrak{X}$*-центральны в* G. *Тогда* $Z_{\mathfrak{X}\Phi}$ *называется* $\mathfrak{X}\Phi$*-гиперцентром группы* G.

Лемма 3 [21]. *Пусть* $Z = Z_{\mathfrak{X}\Phi}(G)$ *и* N *и* T *– нормальные подгруппы группы* G. *Если* $TN/N \le Z_{\mathfrak{X}\Phi}(G/N)$ *и* $(|T|,|N|)=1$, *тогда* $T \le Z$.

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема не верна, и рассмотрим контрпример (G, E), для которого произведение $|G\|E|$ минимально.

(1) *Если* X *– холлова подгруппа из* E, *то условие теоремы выполняется для* (X, X). *Если к тому же* X *нормальна в* G, *то условие теоремы также выполняется для* $(G/X, E/X)$.

Пусть X – холлова подгруппа из E, P – нециклическая силовская 2-подгруппа из X. По условию теоремы каждая подгруппа H из P порядка 4 имеет 2-нильпотентное добавление T в G или является модулярной подгруппой в G. В первом случае $X = X \cap HT = H(X \cap T)$, и поэтому $X \cap T$ является 2-нильпотентным добавлением к H в X. Во втором случае H является модулярной подгруппой в X по лемме 1(1). Таким образом, условие теоремы выполняется для (X, X).

Пусть теперь X – холлова подгруппа из E, которая нормальна в G. Пусть P^*/X – нециклическая силовская 2-подгруппа из E/X, P – силовская 2-подгруппа из P^*, такая, что $P^* = PX$. Тогда P является нециклической силовской 2-подгруппой из E, и поэтому по условию теоремы каждая подгруппа H из P порядка 4 имеет 2-нильпотентное добавление T в G или является модулярной подгруппой в G. Пусть H^*/X – подгруппа из P^*/X порядка 4. Тогда $H^* = [X]H$, где H является силовской 2-подгруппой из H^*. Ясно, $|H|=4$, и поэтому либо $H^*/X = HX/X$ имеет 2-нильпотентное добавление $TX/X \simeq T/T \cap X$ в G/X либо является модулярной подгруппой в G/X по лемме 1(2). Поэтому условие теоремы выполняется для $(G/X, E/X)$.

(2) $O_{2'}(E)=1$.

Предположим, что $O_{2'}(E)\neq 1$. Согласно (1) условие теоремы выполняется для $(G/O_{2'}(E), E/O_{2'}(E))$. Следовательно, по выбору (G,E) теорема верна для $(G/O_{2'}(E), E/O_{2'}(E))$, и значит, для (G,E). Получили противоречие с выбором (G,E).

(3) *Если* $E\neq G$, *то* $E=P$.

Предположим, что $E\neq G$. Согласно (1) условие теоремы остается верным для (E,E), поэтому E является 2-нильпотентной по выбору (G,E). Но согласно (2), $O_{2'}(E)=1$. Значит, $E=P$.

(4) $O_{2'}(G)=1$.

Предположим, что $V=O_{2'}(G)\neq 1$. Тогда согласно (2) и (3) $E=P$. Согласно (1) условие теоремы остается верным для $(G/V, EV/V)$. Значит, теорема верна для $(G/V, EV/V)$ по выбору (G,E). Теперь согласно (2) и по лемме 3 мы заключаем, что теорема верна для (G,E), что противоречит выбору (G,E).

(5) $|P|>8$.

Ввиду выбора группы G, это утверждение вытекает из [23].

(6) G *не имеет нормальной максимальной подгруппы* M *с* $|G:M|=2$ *и* $MP=G$.

В противном случае условие теоремы выполняется для $(G, E\cap M)$. Следовательно, теорема верна для $(G, E\cap M)$ по выбору (G,E). С другой стороны, из G-изоморфизма $G/M \cong E/M\cap E$ заключаем, что $E/M\cap E$ является центральным главным фактором группы G. Значит, теорема верна для (G,E). Получили противоречие.

(7) *Если* $E=P$, *то* P *является силовской 2-подгруппой группы* G.

Пусть G_2 – силовская 2-подгруппа из G. Предположим, что $E=P\neq G_2$, и пусть Q – силовская q-подгруппа из G, где $q\neq 2$. Тогда $|PQ|<|G|$, и по лемме 1(1) условие теоремы выполняется для (PQ,P). Значит, $P\leq Z_{\Phi}(PQ)$. Поэтому PQ нильпотентна. Следовательно, $Q\leq C_G(P)$. Пусть теперь $1=P_0\leq P_1\leq\ldots\leq P_t=P$, где P_{i+1}/P_i – главный фактор группы G_2, $i=0,1,\ldots,t-1$. Тогда P_{i+1}/P_i – главный фактор группы G. Поэтому $P\leq Z(G)$, что противоречит выбору (G,E). Значит, $P=G_2$.

Заключительное противоречие.

Если G является 2-нильпотентной группой, то $E/O_{2'}(E)$ – 2-группа и $G_{2'}/O_{2'}(E)\subseteq C_{G/O_{2'}(E)}(E/O_{2'}(E))$, где $G_{2'}$ – холлова $2'$-подгруппа группы G. Значит, $G/O_{2'}(E)/C_{G/O_{2'}(E)}(E/O_{2'}(E))$ – 2-группа и $E/O_{2'}(E)\leq Z_{\infty}(G/O_{2'}(E))$, что противоречит выбору группы G. Значит, G не 2-нильпотентна. Следовательно, в G существует 2-замкнутая группа Шмидта $H=[H_2]H_q$. Пусть $C=C_G(H_2)$ и $\Phi=\Phi(H_2)$.

Предположим, что H_2 неабелева. Пусть $a,b\in H_2\setminus\Phi$. Предположим, что $|a|=|b|=2$ и $A=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$. Рассмотрим вначале случай, когда $A_G=A$. Тогда A нормальна в G. Рассмотрим ряд $\Phi<A\Phi<H_2$. Так как H_2/Φ – главный фактор группы H, то либо $\Phi=A\Phi$, либо $A\Phi=H_2$. Если $\Phi=A\Phi$, то $A\leq\Phi$, что противоречит построению группы A. Так как подгруппа Фраттини состоит из необразующих элементов, то $A\Phi\neq H_2$. Таким образом, случай, когда $A_G=A$, невозможен. Пусть теперь $A_G=1$. Тогда, применяя лемму 2, получаем $A\leq Z_{\infty}(H)$. Так как $A\Phi/\Phi\leq H_2/\Phi\cap Z_{\infty}(H/\Phi)$, то $H_2/\Phi\leq Z_{\infty}(H/\Phi)$. Следовательно, H/Φ нильпотентна, и поэтому H нильпотентна, что противоречит тому, что H – группа Шмидта. Рассмотрим теперь случай, когда $|A_G|=2$. Тогда $A_G\leq Z_{\infty}(H)$, и поэтому $Z_{\infty}(H/A_G)=Z_{\infty}(H)/A_G$. Применяя

лемму 2, получаем $A/A_G \le Z_\infty(H/A_G)$. Значит, $A \le Z_\infty(H) \cap H_2 = \Phi$, что противоречит построению группы A. Аналогично рассматривается случай, когда $|a| = 4$ и $A = \langle a \rangle$.

Предположим, что H_2 абелева. Тогда $\Phi(H_2) = 1$, и поэтому H_2 – минимальная нормальная подгруппа в H. Если $|H_2| = 2$, то H_q нормальна, и поэтому H нильпотентна. Получили противоречие с тем, что H – группа Шмидта. Предположим, что $|H_2| > 4$. Пусть $V < H_2$ и $|V| = 4$. По условию леммы V является модулярной в G подгруппой. Тогда по лемме 2 получаем, что $V/V_G \le Z_{\mathfrak{U}}(G/V_G)$. Так как H_2 – минимальная нормальная подгруппа в H, то $V_G = 1$. Значит, $V \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Следовательно, $V \le Z_{\mathfrak{U}}(G) \cap H$. Так как $H \cap Z_{\mathfrak{U}}(G)$ является нормальной подгруппой в H, то $H_2 \cap (H \cap Z_{\mathfrak{U}}(G)) \ne 1$. Значит, $H_2 \le H \cap Z_{\mathfrak{U}}(G)$, и поэтому $H_2 \le Z_{\mathfrak{U}}(H)$. Следовательно, H/H_2 нильпотентна и поэтому H нильпотентна. Получили противоречие.

Значит, $|H_2| = 4$. По условию леммы H_2 модулярная подгруппа в G. По лемме 2 $H_2/H_{2_G} \le Z_{\mathfrak{U}}(G/H_{2_G})$. Если $H_{2_G} = 1$, то $H_2 \le Z_{\mathfrak{U}}(G)$, что, как и выше, приводит к противоречию. Ясно, что $|H_{2_G}| \ne 2$. Таким образом, $H_{2_G} = H_2$, а это означает, что H_2 нормальна в G.

Предположим, что $E \ne G$. Тогда $E = P$ и согласно (7) P – силовская 2-подгруппа из G. Согласно (5) H_2 не максимальная подгруппа в P. Так как H – группа Шмидта, то $G \ne C$. Так как $|H_2| = 4$ и H_2 нормальна в G, то $G/C \simeq B \le S_3$. Если $|G/C| = 2$, то $H_2 \le Z_\infty(G)$, и, рассуждая так же, как и выше, приходим к противоречию. Если $|G/C| = 6$, то $G/C = [G_3C/C]G_2C/C$ и $|G/C : G_3C/C| = 2$, где $G_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $G_3 \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Но тогда G_3C нормальная максимальная в G подгруппа, что противоречит (6). Пусть теперь $|G/C| = 3$. Так как $O_{2'}(C) \le O_{2'}(G) = 1$, то $O_{2'}(C) = 1$. Тогда $G = [C]C_3$ является 2-замкнутой группой Шмидта, где C_3 – циклическая группа порядка 3. Рассуждая так же, как и выше, снова придем к противоречию. Случай, когда $E = G$, рассматривается аналогично. Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Huppert, B. Normalteiler and Maximal Untergruppen Endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – № 60 – P. 409–434.

2. Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // J. Pure and Appl. Algebra. – 2003. – № 181 – P. 297–308.

3. Guo, W. X-Semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – № 315 – P. 31–41.

4. Li, Baojun New characterizations of finite supersoluble groups / Baojun Li, A.N. Skiba // Sci. China Ser. A: Math. – 2008. – № 50(1) – P. 827–841.

5. Guo, W. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – № 321 – P. 2843–2860.

6. Li, Shirong Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups / Shirong Li // Math. Proc. of the Royal Irish Academy . – 2000. – № 100A (1) – P. 65–71.

7. Guo, W. Finite groups in which every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Math. Notes. – 2009. – № 86 (3) – P. 325–332.

8. Guo, W. On nonnilpotent groups with every two 3-maximal subgroups permutable / W. Guo, Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2009. – № 50(6) – P. 988–997.

9. Lutsenko, Yu.V. Finite groups with subnormal second and third maximal subgroups / Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Math. Notes. – 2012. – № 91(5) – P. 680–688.

10. Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – № 132 – P. 395–409.

11. Itô, N. Über eine zur Frattini-Gruppe duale Bildung / N. Itô // Nagoya Math. J. – 1955. – № 9 – S. 123–127.

12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin etc: Springer, 1967. – 793 s.

13. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – № 116 – P. 15–17.

14. Asaad, M. On the supersolvability of finite groups I / M. Asaad // Acta. Math. Acad. Scient. Hungar. – 1981. – № 38 – P. 57–59.

15. Derr, J.B. The influence of minimal p-subgroups on the structure of finite groups / J.B. Derr, W.E. Deskins, N.P. Mukherjee // Arch. Math. – 1985. – № 45 – P. 1–4.

16. Yokoyama, A. Finite solvable groups whose F-hypercenter contains all minimal subgroups. / A. Yokoyama // Arch. Math. – 1975. – № 26 – P. 123–130.

17. Ballester-Bolinches, A. On second minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups. / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, Li Yangming // Journal of Algebra. – 2011. – № 342 – P. 134–146.

18. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука, 1978. – 272 с.

19. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin etc: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

20. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt // Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

21. Shemetkov, L.A. On the $X\Phi$-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2009. – № 322 – P. 2106–2117.

22. Skiba, A.N On weakly S-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2007. – № 315 – P. 192–209.

23. Васильев, В.А. Конечные группы с m-добавляемыми максимальными подгруппами силовских подгрупп / В.А. Васильев // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2011. – № 4 (67) – С. 29–37.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 24.03.2014